Københavns Universitet. Økonomisk Institut

2. årsprøve 2013 S-2DM rx ret

Skriftlig eksamen i Dynamiske Modeller

Mandag den 12. august 2013

Rettevejledning

Opgave 1. For ethvert $a \in \mathbf{R}$ betragter vi tredjegradspolynomiet $P_a : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, som er givet ved

$$\forall\, z \in \mathbf{C} : P_a(z) = z^3 + (3-a)z^2 + (2-3a)z - 2a$$

Desuden betragter vi differentialligningerne

$$(*) \qquad \frac{d^3x}{dt^3} + (3-a)\frac{d^2x}{dt^2} + (2-3a)\frac{dx}{dt} - 2ax = 0,$$

og

$$(**) \qquad \frac{d^3x}{dt^3} + 2\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 2x = 24e^{2t}.$$

(1) Vis, at $z = a$ er en rod i polynomiet P_a, og bestem dernæst alle rødderne i polynomiet P_a.

Løsning. Da $P_a(a) = 0$, er a rod i polynomiet P_a, og ved polynomiers division opnår man, at

$$\forall\, z \in \mathbf{C} : P_a(z) = (z-a)(z^2 + 3z + 2).$$

Rødderne i P_a er da $a, -1$ og -2.

(2) Bestem for ethvert $a \in \mathbf{R}$ den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

Løsning. Den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$ er

$$x = c_1e^{at} + c_2e^{-t} + c_3e^{-2t},$$

hvor $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}$, dersom $a \in \mathbf{R} \setminus \{-1, -2\}$.

Hvis $a = -1$, får vi, at

$$x = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} + c_3 e^{-2t},$$

hvor $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}$, og hvis $a = -2$ bliver resultatet

$$x = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t} + c_3 t e^{-2t},$$

hvor $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}$.

(3) Bestem de $a \in \mathbf{R}$, for hvilke differentialligningen $(*)$ er globalt asymptotisk stabil.

Løsning. Differentialligningen $(*)$ er globalt asymptotisk stabil, hvis og kun hvis $a < 0$.

(4) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(**)$.

Løsning. Vi gætter på en løsning af formen $\hat{x} = Ae^{2t}$ og finder så, at

$$x = c_1 e^{t} + c_2 e^{-t} + c_3 e^{-2t} + 2e^{2t},$$

hvor $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}$

Opgave 2. For ethvert $n \in \mathbf{N}_0$ betragter vi mængden

$$A_n = \Big\{ z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re} z < -n \ \vee \ \operatorname{Re} z > n \Big\}.$$

Husk, at $\mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cup \{0\}$ er mængden af alle udvidede naturlige tal.

(1) Vis, at mængden A_n er åben, men ikke konveks for ethvert $n \in \mathbf{N}_0$.

Løsning. Mængderne A_n er foreningsmængde af to åbne halvplaner, så A_n er åben. Men den imaginære akse er ikke en del af A_n, og derfor er A_n ikke konveks, idet punkterne $-2n$ og $2n$ ikke kan forbindes med et ret linjestykke, som er en delmængde af A_n, dersom $n \in \mathbf{N}$. Hvis $n = 0$, kan punkterne -1 og 1 ikke forbindes med et ret linjestykke, som er en delmængde af A_0.

(2) Bestem randen for mængden A_n.

Løsning. Man får, at

$$\partial A_n = \Big\{ z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re} z = -n \ \vee \ \operatorname{Re} z = n \Big\}.$$

(3) Bestem mængden

$$A = \bigcap_{n \in \mathbf{N_0}} A_n.$$

Løsning. Man får, at

$$A = \bigcap_{n \in \mathbf{N}_0} A_n = \emptyset.$$

(4) Bestem mængden

$$A_\infty = \bigcup_{n \in \mathbf{N}_0} A_n.$$

Løsning. Man finder, at

$$A_\infty = \bigcup_{n \in \mathbf{N}_0} A_n = \mathbf{C} \setminus \{ z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re} z = 0 \} = A_0.$$

(5) Bestem randen af mængden A_∞.

Løsning. Vi ser, at

$$\partial A_\infty = \{ z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re} z = 0 \}.$$

(6) Vi betragter mængden

$$K = \{ z \in \mathbf{C} \mid |z| \leq 7 \}$$

og funktionen $f : K \to \mathbf{C}$, som er defineret ved forskriften

$$\forall\, z \in K : f(z) = z^3 + 7z^2 + 2z + 1.$$

Vis, at billedmængden $f(K)$ er kompakt.

Løsning. Billedmængden $f(K)$ er kompakt, fordi K er kompakt, og funktionen f er kontinuert.

(7) Det ydre for mængden K betegner vi med Y, og vi betragter funktionen $g : Y \to \mathbf{C}$, som er defineret ved udtrykket

$$\forall\, z \in Y : g(z) = \frac{i}{z}.$$

Bestem mængden Y og billedmængden $g(Y)$. Godtgør desuden, at billedmængden $g(Y)$ er åben, men ikke konveks.

Løsning. Man finder, at

$$Y = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| > 7\}, \text{ og at } g(Y) = \{w \in \mathbf{C} \mid 0 < |w| < \frac{1}{7}\},$$

hvoraf det fremgår, at billedmængden $g(Y)$ er åben, men da $0 \notin g(Y)$ er $g(y)$ ikke konveks.

(8) Bestem afslutningen $\overline{g(Y)}$ af billedmængden $g(Y)$, og godtgør, at $\overline{g(Y)}$ er kompakt og konveks.

Løsning. Vi bemærker, at

$$\overline{g(Y)} = \{w \in \mathbf{C} \mid |w| \leq \frac{1}{7}\},$$

som klart er en kompakt, konveks mængde.

Opgave 3. Vi betragter 3×3 matricen

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{2} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{7}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{2} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

og vektordifferentialligningen

$$(\S) \qquad \frac{d\mathbf{z}}{dt} = A\mathbf{z}.$$

(1) Vis, at matricen A har egenværdierne $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1}{5}$ og $\lambda_3 = \frac{3}{10}$ med de tilhørende egenvektorer

$$\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1),\ \mathbf{v}_2 = (-5, 3, -5) \text{ og } \mathbf{v}_3 = (6, -1, -1).$$

Løsning. Ved direkte udregning får man, at $A\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2 = \frac{1}{5}\mathbf{v}_2$ og $A\mathbf{v}_3 = \frac{3}{10}\mathbf{v}_3$.

(2) Opskriv den fuldstændige løsning til vektordifferentialligningen (§).

Løsning. Den fuldstændige løsning til vektordifferentialligningen (§) er

$$\mathbf{z} = \mathbf{z}(t) = c_1 e^t \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\frac{1}{5}t} \mathbf{v}_2 + c_3 e^{\frac{3}{10}t} \mathbf{v}_3,$$

hvor $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}$.

For ethvert $v \in \mathbf{R}$ betragter vi 3×3 matricen

$$B(v) = \begin{pmatrix} 2v & 1 & 1 \\ 1 & 4v & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

og vektordifferentialligningen

$$(\S\S) \qquad \frac{d\mathbf{w}}{dt} = B(v)\mathbf{w}.$$

(3) Undersøg, om differentialligningssystemet (§§) er globalt asymptotisk stabilt for nogen værdi af parameteren $v \in \mathbf{R}$.

Løsning. Hvis differentialligningssystemet (§§) skal være globalt asymptotisk stabilt, må vi kræve, at den symmetriske matrix $B(v)$ er negativ definit. Denne matrix har de ledende hovedunderdeterminanter $D_1 = 2v, D_2 = 8v^2 - 1$ og $D_3 = 16v^2 - 6v$. Hvis $D_1 < 0, D_2 > 0$ og $D_3 < 0$, får man, at $v < 0$ og $v > \frac{3}{8}$, hvilket ikke går an.

Opgave 4. For ethvert $a > 0$ betragter vi funktionen $F_a : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\, (t, x, y) \in \mathbf{R}^3 : F_a(t, x, y) = x^2 + e^{at} y,$$

og integralet

$$I(x) = \int_0^1 \left(x^2 + e^{at} \dot{x} \right) dt.$$

(1) Vis, at for ethvert $a > 0$ og ethvert $t \in \mathbf{R}$ er funktionen $F_a = F_a(t, x, y)$ konveks som funktion af $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi finder, at

$$\frac{\partial F_a}{\partial x}(x,y) = 2x \;\text{ og }\; \frac{\partial F_a}{\partial y}(x,y) = e^{at},$$

så F_a har Hessematricen

$$F_a'' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

der er positiv semidefinit overalt på $\mathbf{R}^2$. Dette viser, at funktionen F_a er konveks som funktion af (x, y).

(2) Bestem den funktion $x^* = x^*(t)$, som minimerer integralet $I(x)$, når betingelsen $x^*(0) = 1$ er opfyldt.

Løsning. På grundlag af resultatet i det foregående spørgsmål, ser vi, at dette variationsproblem er et minimeringsproblem. Vi får umiddelbart, at Eulers differentialligning i dette tilfælde er

$$2x - ae^{at} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}e^{at}.$$

Da vi har krævet, at $x^*(0) = 1$, får vi, at $a = 2$. Altså er $x^*(t) = e^{2t}$.